ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Д. С. Набатова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА И МАГИСТРАТУРЫ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим и инженерно-техническим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2015

УДК 519.816(075.8)
ББК 65.050.2я73
Н13

***Автор*:**

Набатова Дария Сергеевна — кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой прикладной математики Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

***Рецензенты*:**

Попов В. Ю. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации;

Топчеева И. И. — кандидат технических наук, профессор кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Набатова, Д. С.

Н13 Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Д. С. Набатова. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 292 с. — Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-5188-2

Рассматривается практика применения математических методов линейного и нелинейного, динамического программирования, многокритериальной оптимизации для структурированных и слабоструктурированных моделей, теории игр в качестве математического и инструментального обеспечения задач принятия решений в экономике.

Дисциплина «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений» является дисциплиной базовой части общенаучного цикла дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению «Прикладная информатика» для магистров.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей и специалистов, занимающихся вопросами разработки программного обеспечения для систем поддержки принятия решений.

УДК 519.816(075.8)
ББК 65.050.2я73

ISBN 978-5-9916-5188-2

Оглавление

Введение

Учебник предназначен для подготовки магистров направления «Прикладная информатика» (дисциплина «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений»). Отдельные главы могут быть использованы для подготовки бакалавров направления «Менеджмент» (дисциплина «Методы принятия управленческих решений») и направления «Прикладная математика» (курс по выбору «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений»). Изложены основные понятия и методы теории принятия решений в соответствии с принятой классификацией. Математические основы представлены следующими разделами: математическое программирование, динамическое программирование, методы многокритериальной оптимизации, методы многокритериальной оптимизации для слабоструктурированных проблем, теория игр. Приводятся примеры задач из экономической практики с решениями в виде электронных таблиц *MS Excel*. В последней главе сделан обзор современных программных средств поддержки принятия решений на основе информации в открытом доступе, размещаемой разработчиками соответствующих программных продуктов.

Проблема выбора лучшего варианта из возможного набора действий — это то, с чем сталкивается любой человек, независимо от вида деятельности, которой он занимается. Принятие правильного решения — важный этап, определяющий будущее. Методы поддержки принятия решений должны помочь человеку в сложных задачах выбора. Математические методы основаны на теории принятия решений (ТПР). Это математическая дисциплина, объединяющая способы и процедуры формализации процесса принятия решений. Иначе говоря, от проблемы выбора она позволяет перейти к математической постановке задачи и ее решению существующими методами.

Выбор методов существенно зависит от класса анализируемых проблем, которые классифицируются как структурированные и слабоструктурированные. Для структурированных проблем и соответствующих моделей определяют количественные зависимости между параметрами внешней среды и количественными оценками для возможных решений. Для слабоструктурированных моделей этого сделать невозможно, поэтому для них применяют специальные методы исследования, которые тоже представлены в этой книге.

Инструментальные методы определяют способы решения сформулированных задач. Среди них необходимо отметить методы оптимизации, динамического программирования, теории игр и т.д. Эти методы реализованы в многочисленных продуктах, широко представленных на рынке программного обеспечения. Однако чтобы ими воспользоваться, нужно как минимум иметь представление о том, по какому принципу они работают. Современные системы поддержки принятия решений — это сложные программные продукты, требующие отдельного подробного изучения и дополнительных навыков для эффективного использования. В рамках курса по поддержке принятия решений, который по своему содержанию относится к математическим дисциплинам, можно предложить лишь самый общий обзор по этой теме.

Хорошие возможности в решении распространенных на практике задач поддержки принятия решений предоставляет приложение *MS Excel*.

Рассматривая процесс принятия решений, нельзя не отметить важную роль, которая отводится специалистам в этой области. Уступая в скорости машинным алгоритмам структурированного исследования, человек умеет выделять главное, оценивать обстановку, отбрасывать второстепенное, восполнять отсутствие информации догадками и интуицией. Методы решения для слабоструктурированных проблем основаны на анализе оценок, представляемых экспертами. Это единственная возможность получить решение для такого класса задач.

Учебник в первую очередь ориентирован на специалистов-практиков, которые занимаются созданием программного обеспечения для конкретных задач. Предпринята попытка доступным языком изложить математическую основу используемых алгоритмов. Простые примеры из практики иллюстрируют все этапы их применения. Вопросы сходимости алгоритмов, доказательства соответствующих теорем существования и т.д. остаются за рамками этой книги.

Учебник написан в соответствии с программой дисциплины «Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений» базовой части общенаучного цикла дисциплин ФГОС ВО по направлению «Прикладная информатика».

В результате изучения данного курса студент должен:

знать

- основные понятия теории принятия решений;
- классификацию задач принятия решений для детерминированных моделей;
- основы математических методов решения задач линейного, квадратичного, целочисленного программирования, динамического программирования, многокритериальной оптимизации для структурированных и слабоструктурированных проблем, теории игр;
- существующие современные программные продукты поддержки принятия решений;

уметь

- формулировать задачу в предметной области на основе имеющейся информации;
- строить и оценивать адекватность математической модели;
- проводить вычисления и проверять достоверность результатов;

владеть

- навыками применения современных математических и инструментальных методов для подготовки и обоснования управленческих решений в финансово-экономической сфере;
- методикой построения, анализа и применения математических моделей для решения задач принятия решений;
- навыками использования систем поддержки принятия решений для прикладных задач в экономике и финансах.

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- основные понятия теории принятия решений;
- участников процесса принятия решений;
- общую классификацию задач принятия решений;
- методику принятия решений в условиях определенности и в конфликтных ситуациях;
- этапы обоснования принятия решений;
- определение критерия эффективности;
- аналитические и имитационные модели принятия решений;

уметь

- определять класс для рассматриваемых задач финансово-экономической сферы;
- формировать математическую модель задачи;
- проводить сбор данных и проверку модели;
- подбирать метод решения;
- проводить анализ результатов;

владеть

- навыками выбора и построения качественной модели;
- методами решения задач для каждого класса.

1.1. Основные понятия теории принятия решений

В теории принятия решений (ТПР) рассматриваются вопросы выбора лучшего решения из некоторого набора вариантов. Необходимо получить функциональную зависимость между параметрами системы и количественной оценкой критерия эффективности. Если это возможно, то такая задача может быть решена математическими методами, например из теории оптимизации. Однако не всегда такое решение единственно, кроме того существуют задачи, для которых функциональные зависимости построить невозможно либо исключительно сложно и дорого. В связи с этим ключевым понятием ТПР является человек, который осуществляет окончательный выбор, — *лицо, принимающее решения* (ЛПР). Также в процессе поиска решения обращаются к специалистам за оценками и рекомендациями. Люди, мнение которых оказывает влияние на процесс принятия решений, являются *экспертами*. Возможные варианты действий называются *альтернативами*. Для постановки задачи принятия решения таких альтернатив должно быть как минимум две. Альтернативы могут быть независимые и зависимые. Независимые альтернативы не влияют на параметры других альтернатив. Их можно исключать из рассмотрения, выделять как приоритетные. Для зависимых альтернатив существует взаимное влияние оценок и качеств одних альтернатив на другие. Для некоторых задач ТПР все альтернативы могут быть заданы и определены в начале выбора. В этом случае мы имеем замкнутое, конечное множество альтернатив. Есть задачи, в которых новые альтернативы появляются в процессе принятия решений. Для задач с большим числом альтернатив (больше сотни) необходимо определять четкие правила выбора, последовательность использования экспертов. Это дает возможность получать последовательные и непротиворечивые действия для достижения цели.

Важный вопрос ТПР — это оценки оптимальности принимаемых решений. Для построения таких оценок необходимо сформировать некоторые признаки или факторы, которые определяют привлекательность данной альтернативы для ЛПР. Будем называть их *критериями оценки альтернатив*.

Количество критериев оказывает большое влияние на сложность задачи принятия решения. Если критерий один и определена функциональная зависимость между его значением и параметрами системы, то можно ограничиться классическими методами оптимизации. Если критериев два-три и альтернатив немного, то их можно попарно сравнить и найти компромисс. При большом количестве критериев их необходимо объединять в независимые группы, имеющие конкретное смысловое значение. Это дает возможность сделать процесс принятия решения более эффективным.

Каждый критерий оценки альтернатив может иметь свою собственную *шкалу*. Оценки могут быть количественные — непрерывные и дискретные, качественные — хорошо, плохо и т.д., бинарные — да или нет.

В ТПР рассматривают следующие виды шкал.

1. *Шкала порядка*. Это качественные оценки, упорядоченные в порядке возрастания или убывания, они нередко используются экспертами. Для некоторых методов анализа качественным оценкам ставится в соответствие некоторое число. Например, оценка экологического загрязнения района:

- экологически чистый район;
- экологическое состояние удовлетворительное;
- экологическое загрязнение велико.

2. *Шкала равных интервалов*. Это количественная дискретная шкала с равными интервалами для оценок. Начало отсчета и шаг шкалы выбираются произвольно. Например, шкала величины прибыли: 5 млн, 10 млн, 15 млн.

3. *Шкала пропорциональных оценок* — идеальная количественная шкала, в которой отсчет начинается с нуля и оценки могут принимать любые значения начиная с точки отсчета.

В задачах многокритериальной оптимизации нередко возникает необходимость сравнения альтернатив с оценками критериев по разным шкалам. В этом случае необходимо учитывать разницу по длине для шкал критериев одного вида и отличия в весомости значений в шкалах разных видов.

1.2. Общая классификация задач теории принятия решений

К задачам ТПР в экономике относятся планирование номенклатурной программы, планирование производства, планирование и управление логистикой, управление персоналом, планирование покупки и ремонта оборудования, планирование управленческого и финансового учета, управление запасами и т.д. Для таких задач решение принимается на основе конкретных исходных данных. Все параметры являются детерминированными. Выбор методов существенно зависит от общей постановки и применяемых методов решения. На основании существующих подходов к решению задач можно представить общую классификацию задач теории принятия решений.

1. **Задачи оперативного управления**. Это задачи с детерминированными параметрами. Решением является векторное значение, определяющее оптимальные параметры для данного момента времени. Компоненты вектора должны соответствовать системе ограничений, связанных, как правило, с ограниченностью ресурсов. Это задачи оптимизации объемов производства, оптимизации инвестиций и т.д. Для решения таких задач используются методы линейного и квадратичного программирования. В ТПР часто рассматриваются задачи с дискретными значениями. Это задачи построения оптимального производственного плана, транспортная задача с неделимым грузом, задача коммивояжера, задача о назначениях, задача о ранце, задача о кратчайшем пути. В таких задачах используются метод потенциалов для транспортных задач, методы целочисленного программирования: метод Гомори, метод ветвей и границ.

2. **Задачи перспективного и среднесрочного планирования и управления**. Это задачи с детерминированными параметрами,

которые изменяются во времени. Методом решения для них является метод динамического программирования. Этот метод также используется в сложных системах, допускающих принятие решений поэтапно для отдельных подсистем, используя принцип декомпозиции.

3. **Многокритериальные задачи принятия решений**. При исследовании многих математических моделей, соответствующих задачам теории принятия решений, становится очевидным, что одного критерия недостаточно. Первые попытки рассмотреть задачи с несколькими критериями были предприняты еще в 1881 г. Ф. Эджвортом, затем основные принципы многокритериальной оптимизации были заложены итальянским математиком и социологом В. Парето в начале XX в. Но особую актуальность они приобрели в эпоху экономических кризисов начиная с Великой американской депрессии. Появилась необходимость поиска не только самого лучшего решения, а решения, устраивающего все стороны. Методы решения задач многокритериальной оптимизации: метод свертки (метод обобщенного критерия), метод приоритетов, метод уступок, метод идеальной точки. Задачи этого раздела часто описываются слабоструктурированными моделями, для которых невозможно установить функциональные зависимости. Они представлены набором альтернатив и оценок параметров. Для таких моделей рассматриваются специальные методы: *AHP*, *ELECTRE*, *MAUT*, *SMART*.

4. **Принятие решений в конфликтных ситуациях**. Этот класс задач выделяется в особый раздел многокритериальной оптимизации, когда присутствует несколько сторон в принятии решений. Каждая сторона преследует свои цели. Математической основой для решения таких задач являются методы теории игр.

1.3. Этапы обоснования принятия решений

Этап 1. Для начала необходимо провести подробный анализ рассматриваемой проблемы, выделить отдельные элементы, установить функциональные и управляющие связи между ними. Должны быть сформулированы проблема и причины ее возникновения. Анализ должен быть завершен построением *качественной модели* — результатом совместных усилий специалистов предметной области и системных аналитиков. Качественная модель определяет размерность задачи, перечень управляемых параметров и возможные варианты действий.

Этап 2. Выбор *концептуальной модели*. Это схема, которая позволяет установить зависимость между характеристиками системы и существующей классификацией задач теории принятия решений. Одной и той же концептуальной модели могут соответствовать разные качественные модели. Например, задаче раскроя и задаче перевозки крупногабаритных грузов соответствует одна и та же модель из категории задач оперативного управления, решаемая методами целочисленного программирования.

Этап 3. Определение *критерия эффективности*. Это один или несколько количественных показателей, которые устанавливают связь между параметрами полученного решения и степенью достижения цели. В качестве критериев для экономических задач могут использоваться доход, прибыль, издержки, капитализация, ликвидность и т.д. Критерий должен удовлетворять требованиям по представительности, чувствительности, простоте вычислений, наличию качественного и здравого смысла.

Этап 4. Построение *математической модели*. Создание математической модели предполагает формирование конкретных функциональных зависимостей между параметрами системы и количественными оценками критерия эффективности. Кроме этого, необходимо сформировать систему ограничений для значений параметров системы, которая связана с возможностью осуществления полученного решения. В зависимости от того, насколько хорошо это удалось, различают *хорошо структурированные модели* — это модели, для которых все зависимости выражены функционально, и *слабоструктурированные модели*, для которых такие зависимости определить не удалось. Типичные проблемы принятия решений описываются хорошо структурированными моделями, за исключением, быть может, задач многокритериальной оптимизации.

Этап 5. Выбор *метода решения* задачи. Он зависит от характера математической модели: вида и количества критериев, вида системы ограничений. Если невозможно подобрать алгоритм, необходимо упростить модель. На практике нередко применяют различные допущения, позволяющие получить решения, близкие к оптимальным.

Этап 6. *Численная реализация алгоритма*. На этом этапе необходимо обращение к существующему типовому программному обеспечению для выбранных алгоритмов или создание специализированных программ, предназначенных индивидуально для рассматриваемой задачи.

Этап 7. *Сбор данных и проверка модели*. На этом этапе проверяется правильность созданной модели, оцениваются непротиворечивость, чувствительность, реалистичность и работоспособность модели. Непротиворечивость модели предполагает схожесть характера поведения результатов расчетов при схожем поведении соответствующих входных параметров задачи (например, переход входного параметра от возрастания к убыванию приводит к одному виду поведения решения). Чувствительность модели проверяется на основе анализа диапазонов изменений выходных результатов и показателей эффективности при варьировании диапазона значений входных параметров (например, соответствие малым изменениям параметров малых изменений результатов). Проверка реалистичности осуществляется на основе сопоставления результатов расчетов известным решениям для тестовых задач. Работоспособность модели связана с оценкой необходимых ресурсов и затрат для ее реализации. Проводится тестирование программного обеспечения.

Этап 8. *Анализ полученных результатов и формирование окончательного решения*. На этом этапе проводится качественный анализ результатов и выбор, в тех случаях когда это необходимо, решения, которое будет предложено для проведения мероприятий по его реализации.

1.4. Модели принятия решений

Для математических моделей рассматривают три основных класса: аналитические, имитационные и аналитико-имитационные.

Аналитические модели представляют описание процесса функциональными зависимостями между параметрами и результатом. Это могут быть формулы, определяющие общепринятые законы экономической и хозяйственной деятельности. Функциональные зависимости также могут быть получены на основе изучения статистических данных, анализа экономических аспектов, предположений экспертов. Аналитические модели — самый удобный и эффективный инструмент для исследования, позволяющий получить конкретные количественные оценки. Такие модели, как правило, компактны, хорошо представимы, но, к сожалению, в большинстве случаев их получить очень сложно.

Имитационные модели воспроизводят процесс экономической деятельности с последующим анализом результатов. В основном эти модели используются для анализа систем, имеющих случайные параметры (системы массового обслуживания, рост и падение биржевых индексов и т.д.). Основной недостаток имитационных моделей — это необходимость проводить огромное количество вычислений, чтобы обеспечить достоверность результатов.

Аналитико-имитационные модели представляют комбинацию двух типов моделей.

1.5. Использование компьютера при решении прикладных задач

На сегодняшний день на рынке представлено огромное количество коммерческого программного обеспечения поддержки принятия решений для различных областей экономической деятельности. Это бухгалтерские программы, программы расчета смет, оценки эффективности инвестиционных проектов, оценки недвижимости и т.д. Нередко стоимость их весьма высока, а для того чтобы их освоить, нужно пройти специальный курс подготовки. Между тем табличный процессор *MS Excel* установлен практически на любом компьютере и обладает неплохими возможностями для решения прикладных задач, в том числе и поддержки принятия решений. Большой набор встроенных функций практически полностью удовлетворяет потребности большинства задач. Диалоговое окно «Поиск решения» дает возможность решать задачи линейного программирования. Есть специальные финансовые функции, используемые как инструмент финансово-экономического анализа. Кроме этого, есть много полезных функций для работы с датой и временем, статистические и т.д.

Если встроенных функций недостаточно, в *MS Excel* есть возможность создавать собственные программные коды (макросы), с которыми можно решать практически любые задачи. Такие коды используются для автоматизации последовательности часто повторяемых действий и запускаются через элементы графического интерфейса *MS Excel*. Если есть необходимость описать более сложную последовательность действий, например с дополнительными условиями или изменениями параметров, то есть возможность составить программу. Программы составляются с использованием языка *VBA* (*Visual Basic for Applications*). Это модификация языка *Visual Basic* для работы с приложениями пакета *Microsoft Office*. С помощью *VBA* можно создавать специальные диалоговые окна, в которых представлена информация о ходе вычислений, и вводить нужные данные.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие основные классы задач поддержки принятия решений существуют?
2. Назовите классические примеры задач оперативного управления.
3. Какие методы существуют для решения задач оперативного управления?
4. Назовите метод решения задач перспективного планирования.

5. Чем отличаются задачи многокритериальной оптимизации от остальных классов задач теории принятия решений?

6. Перечислите методы решения для задач многокритериальной оптимизации.

7. Какая математическая дисциплина является основой для задач принятия решений в конфликтных ситуациях?

8. Назовите основные этапы обоснования решений.

9. Чем качественная модель отличается от концептуальной модели?

10. Что характерно для слабоструктурированных моделей?

11. Назовите основные классы математических моделей принятия решений.

12. Чем отличаются имитационные модели от аналитических?

13. Какие встроенные функции процессора *MS Excel* позволяют решать задачи поддержки принятия решений?

Глава 2
ЗАДАЧИ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В результате изучения данной главы студент должен:

знать

- типы задач, которые относятся к задачам оперативного управления;
- задачи построения производственного плана;
- транспортную задачу; задачу о назначениях;
- задачу составления кратчайшего пути;
- задачу календарного планирования;
- задачу о выпуске неделимой продукции;

уметь

- составлять целевую функцию и систему ограничений для анализируемой модели;
- выбирать соответствующий метод решения;
- реализовывать все этапы вычислений, соответствующие выбранному методу;

владеть

- навыками применения алгоритмов решения задач линейного, целочисленного и квадратичного программирования;
- симплекс-методом для задач линейного программирования;
- методами построения начального плана перевозок и потенциалов для транспортной задачи;
- методами Гомори и ветвей и границ для задач целочисленного программирования;
- методами Франка — Вульфа и штрафных функций для задач квадратичного программирования.

2.1. Примеры задач оперативного управления

Определим признаки, по которым задачу принятия решений можно отнести к *задачам оперативного управления*. Для поиска оптимального решения в таких задачах должны быть определены:

1) набор изменяемых параметров системы — вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) критерий оптимальности — *целевая функция* $f(x)$, значения которой определяют количественную оценку критерия оптимальности;

3) набор ограничений для компонент вектора x.

Необходимо найти оптимальное решение x^*, которое обеспечивало бы лучшее значение целевой функции (минимум или максимум), с одной стороны, и являлось *допустимым*, удовлетворяло ограничениям задачи — с другой.

В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений это могут быть задачи *линейного программирования*, *целочисленного программирования*, *квадратичного программирования* (общий термин — *математическое программирование*). Конечно, это не все задачи, которые удовлетворяют данным признакам. Существуют более сложные модели. Но для экономических задач в основном характерны такие задачи, поэтому ограничимся изложением методов решения именно для них.

Рассмотрим несколько постановок задач экономического содержания, математической моделью для которых будут задачи математического программирования.

Построение оптимального плана производства. Предприятие изготавливает n видов продукции из m типов сырья. Необходимо определить количество каждого вида продукции для получения максимальной прибыли. Известны нормы расхода сырья — матрица A и цена каждого вида продукции — вектор P. Запасы сырья ограничены — вектор B. Пусть компоненты вектора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определяет количество продукции каждого вида. Система ограничений задачи имеет вид $AX \le B$. В зависимости от вида функции прибыли это может быть задача линейного или квадратичного программирования.

Портфельный анализ. Инвестор вкладывает имеющиеся денежные средства в n видов ценных бумаг. Известны величины μ_i доходности для каждого актива и ковариационная матрица рисков V. Необходимо определить доли вложений в каждый актив $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, чтобы обеспечить минимальный риск и заданную величину доходности μ. Целевая функция задачи имеет вид

$$f(x) = X^T V X \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu;$$

$$x_i \ge 0, i = 1, ..., n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

В такой постановке это задача квадратичного программирования.

Транспортная задача. Банк, имеющий сеть филиалов в четырех городах, финансирует инвестиционные проекты по пяти адресам. Известна стоимость перевода денежных средств из каждого филиала до каждого адресата. Необходимо составить план перевода денег таким образом, чтобы суммарная стоимость банковских операций была минимальна. Исходные данные заданы таблицей (табл. 2.1). Математической моделью для такой задачи является транспортная задача.

Таблица 2.1

Исходные данные для транспортной задачи

Банки	Получатели платежей					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	2	3	6	5	80
A_2	6	8	7	9	4	60
A_3	9	7	6	3	5	70
A_4	5	3	4	7	8	40
b_j	50	80	30	60	30	250

План перевозок $X = (x_{ij})$ — это матрица $m \times n$, каждый элемент которой определяет объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю. Будем считать груз неделимым и величину перевозки — целым числом. Суммарная *стоимость перевозки* определяется функцией

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Система ограничений определяется условиями о том, что все адресаты банка должны получить причитающиеся им средства в полном объеме, а филиалы — перевести все имеющиеся у них средства:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Специфика решения транспортной задачи такова, что если в ограничениях задачи присутствуют целые числа, то и оптимальный план будет определяться в целых числах. Если исходные данные представлены не в целых числах, то и в ответе могут появиться дробные значения. Транспортная задача в ряду задач линейного программирования стоит особняком и имеет свои методы решения.

Задача о назначениях. Имеется n исполнителей, между которыми нужно распределить n работ, известна стоимость исполнения c_{ij} i-м исполнителем работы j $(i, j = 1, ..., n)$. Нужно распределить работу таким образом, чтобы стоимость была минимальной при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Для составления математической модели обозначим через x_{ij} факт назначения i-го исполнителя на j-ю работу: x_{ij} принимает значение 1, если исполнитель i назначен на работу j, и 0 — если не назначен. Целевая функция отражает стоимость назначений и имеет вид

$$\min f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях, учитывающих, что каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, ..., n,$$

и что каждую работу выполняет только один исполнитель:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, ..., n,$$

при условиях неотрицательности и целочисленности: $x_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \in \{0; 1\}$.

Задачу о назначениях можно рассматривать как частный случай транспортной задачи, но с учетом специфики для ее решения используют другие более эффективные методы. Задачу о назначении используют при закреплении машин за маршрутами, распределении инструментов для обработки и т.д. Если в задаче о назначениях число исполнителей равно числу работ, то говорят о закрытой модели, иначе — об открытой. Чтобы перейти к закрытой модели, вводят фиктивных исполнителей с нулевой эффективностью или фиктивные работы по аналогии с транспортной задачей.

Задача о коммивояжере. Коммивояжер должен посетить каждый из n городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен иметь минимальную протяженность. Пусть

$C = (c_{ij}), i, j = 1, ..., n$ — матрица расстояний между городами. Обозначим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } i \text{ приезжает} \\ & \text{непосредственно в город } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид

$$\min f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, ..., n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, ..., n;$$

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0; 1\}.$$

Система ограничений обеспечивает построение маршрута, при котором коммивояжер въезжает в каждый город только один раз. Этого недостаточно, так как среди решений есть маршруты, не проходящие через все города. Устранение таких решений достигается при добавлении ограничений

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \; i, j = 1, ..., n, \; i \neq j.$$

Переменные u могут принимать любые значения. Можно показать, что ограничение выполняется только для замкнутого цикла, проходящего все города. В этом отличие задачи коммивояжера от задачи о назначениях. Для решения задачи коммивояжера применяется алгоритм Литтла.

Задача календарного планирования. Имеется n станков (машин), на которых требуется обработать m деталей. Заданы маршруты (в общем случае различные) обработки каждой детали на каждом из станков или группе станков. Задана также продолжительность операций обработки деталей. Предполагается, что одновременно на станке можно обрабатывать не более одной детали. Требуется определить оптимальную последовательность обработки. Критерием оптимальности могут выступать продолжительность обработки всех деталей, суммарные затраты на обработку, общее время простоя станков и др. Существует огромное число постановок данной задачи, учитывающих конкретные условия производства.

Задача о ранце. Банковская организация, оптимизируя расходы, должна закрыть некоторое число своих филиалов из двенадцати, чтобы сэкономить на аренде 15 млн руб. Каждый филиал обслуживает c_i тыс. человек. Известна стоимость аренды w_i. Филиалы должны быть выбраны таким образом, чтобы число обслуживаемых клиентов в закрываемых филиалах было минимально. Математическая модель такой задачи — задача о ранце. Общая постановка задачи формулируется следующим образом. Имеется n предметов. Предмет i, $i = 1, ..., n$, обладает весом w_i и полезностью c_i. Пусть b — общий максимально допустимый вес предметов, которые можно положить в ранец. Требуется выбрать предметы таким образом, чтобы их общий вес не превышал максимально допустимый и при этом суммарная полезность (ценность) содержимого ранца была максимальной. Пусть $x_i = 1$, если предмет положен в ранец, и $x_i = 0$ — в противном случае. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le b, x_i \in \{0; 1\}.$$

Для рассматриваемого примера о филиалах используется задача о ранце в другой постановке. Необходимо не складывать предметы в ранец, а наоборот — вытащить наименее ценные. В такой постановке для целевой функции рассматривается задача поиска минимума:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{12} c_i x_i; \ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \ge 15, x_i \in \{0; 1\}.$$

Если $x_i = 1$, то филиал закрывается. Таким образом, задача о ранце может быть в двух противоположных формулировках. С одной стороны — как задача о выборе наиболее ценных предметов, с другой — наоборот, как задача о выборе наименее значимых. Знаки системы ограничений и целевой функции в этом случае меняются на противоположные.

Задача о выпуске неделимой продукции. Пусть производимые товары являются неделимыми, т.е. физический смысл имеет лишь их целое неотрицательное количество («штуки»). Предположим, что требуется составить производственную программу, обеспечивающую максимум суммарной прибыли и не выводящую за пределы данных ресурсов. Например, автомобилестроительный завод выпускает три модели автомобилей, которые изготавливаются последовательно в трех цехах. Мощность цехов составляет 300, 250 и 200 человеко-дней в декаду. В первом цехе для сборки одного автомобиля первой модели требуется 6 человеко-дней, второй модели — 4 и третьей модели — 2 человеко-дня в декаду соответственно. Во втором цехе трудоемкость равна 3, 4 и 5 человеко-дней соответственно, в третьем — по 3, 3 и 2 человеко-дня на каждую модель. Прибыль, получаемая заводом от продажи одного автомобиля каждой модели, составляет соответственно 15, 13 и 11 тыс. долл. Необходимо определить оптимальный план выпуска автомобилей, обеспечивающий максимальную прибыль. Пусть x_i — количество выпускаемых автомобилей i-й модели в течение декады, $i = 1, ..., n$. В принятых обозначениях модель имеет вид

$$\max f(x) = 15x_1 + 13x_2 + 11x_3;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 300, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 250, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 200, \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{Z} \text{ — целые числа.} \end{cases}$$

Задача раскроя. Из минимального количества листов стекла размером 8×6 м^2 требуется вырезать 10 оконных стекол размером 4×4 м^2, 20 оконных стекол размером 4×5 м^2 и 30 оконных стекол размером 3×3 м^2. Множество вариантов раскроя показано в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Задача раскроя

Вариант	Размер, м^2		
	4×4	4×5	3×3
1	2	—	—
2	1	1	—
3	1	—	2
4	—	2	—
5	—	—	4
6	—	1	2

Необходимо определить план раскроя, требующий минимального количества материала. Пусть x_i — количество листов стекла размером 8×6 м^2, которые следует раскроить по варианту i. Тогда модель имеет вид

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_2 + 2x_4 + x_6 \geq 20, \\ 2x_3 + 4x_5 + 2x_6 \geq 30, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., 6, \\ x_i \text{ — целое число, } i = 1, ..., 6. \end{cases}$$

2.2. Задача линейного программирования

Рассмотрим пример постановки задачи оперативного управления.

Пример 2.1

Предприятие пищевой промышленности изготавливает три вида ассорти из цукатов, орехов и сухофруктов. Для изготовления используется сырье пяти видов: цукаты из ананасов (А), изюм (И), банановые чипсы (Б), фундук (Ф) и кешью (К). Известны нормы расхода сырья каждого вида для приготовления 100 г ассорти. Запасы сырья ограничены. Известны отпускные цены предприятия на продукт каждого вида. Необходимо найти оптимальный план производства: сколько каждого вида продукции нужно произвести, чтобы доход предприятия был максимальным.

Все исходные данные для примера представим в виде таблицы (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Вид ассорти	А	И	Б	Ф	К	Цена за 1 кг, руб.
I	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2	180
II	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	170
III	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	190
Запас сырья, кг	200	180	150	160	180	

Каждый элемент таблицы — доля данного вида сырья в 100 г продукции. Пусть вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ определяет план производства. Значение каждой компоненты — это количество ассорти данного вида. Целевая функция определяет прибыль предприятия:

$$f(x) = 180x_1 + 170x_2 + 190x_3 \to \max .$$

Ограничения запасов сырья — это ограничения задачи:

$$
\begin{cases}
0,3x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 \le 200,\\
0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 \le 180,\\
0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 \le 150,\\
0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 \le 160,\\
0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 \le 180,\\
x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{cases}
$$

Если целевая функция и система ограничений — линейные функции, то задача программирования называется линейной — ЗЛП. Множество точек, удовлетворяющих системе ограничений, будем называть областью допустимых значений. Для таких задач решение, если оно существует, всегда находится на границе области допустимых значений. Впервые решение такой задачи было предложено Дж. Б. Данцигом в 1969 г.

Рассмотрим постановку задачи линейного программирования. В общем виде ограничения могут иметь вид равенств и неравенств:

$$
f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 = C^T X + c_0;
$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
\ldots\\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k,\\
\ldots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m,\\
x_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, n.
\end{cases}
$$

Любое из ограничений делит пространство R^n на два подпространства. Одно из них является допустимым, его точки удовлетворяют ограничению. Область допустимых решений — выпуклый многогранник с конечным числом вершин, которые являются крайними точками этого множества. Решением ЗЛП может быть вершина, ребро, грань. Решение определяет направление градиента целевой функции — вектор C. Возможные исходы решения ЗЛП:

1) решение единственное — вершина множества допустимых решений;

2) число решений бесконечно — континуальное множество (ребро или грань множества допустимых решений);

3) решений нет — целевая функция неограниченная;

4) нет точек, удовлетворяющих системе ограничений, — множество допустимых решений пусто.

2.2.1. Каноническая и стандартная формы задачи

Наличие ограничений разного вида в исходной постановке усложняет решение задачи. Если из каждого ограничения-равенства выразить одну переменную, то можно снизить размерность задачи. В этом случае задача линейного программирования будет приведена к *стандартной форме* (виду):

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = C^T X;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_i \ge 0,\ i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Если в стандартной форме ЗЛП осталось две переменные, то для такой задачи можно построить область ограничений на плоскости и найти решение графически.

Если число переменных больше двух, то задача решается аналитически, нужно привести ее к *каноническому виду*. Это вид, в котором все ограничения имеют вид равенств. Для этого вводят дополнительные переменные: для ограничений со знаком «≥» — переменную со знаком «–»; для ограничений со знаком «≤» — переменную со знаком «+». Пусть всего *k* ограничений, которые имеют вид неравенств. Тогда канонический вид задачи представляется следующим образом:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 = C^T X + c_0;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+1} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+k} = b_m, \\ x_i \ge 0,\ i = 1, ..., n+k. \end{cases}$$

Пример 2.1 (продолжение)

Запишем систему ограничений задачи в каноническом виде:

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 + x_5 = 200, \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 + x_6 = 180, \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 + x_7 = 150, \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 + x_8 = 160, \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 + x_9 = 180, \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., 9. \end{cases}$$

Все ограничения имели знак «≤», поэтому дополнительные переменные входят в эти ограничения со знаком «+». Найдем решение задачи с использованием программы *MS Excel* (рис. 2.1).

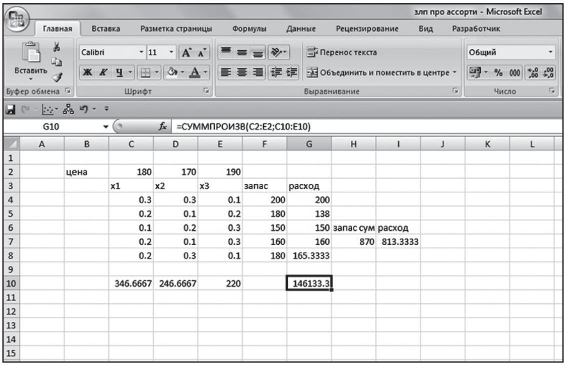

Рис. 2.1. **Решение задачи линейного программирования в *MS Excel***

Решение задачи $x^* = (346{,}67;\ 246{,}67;\ 220)$. Величина прибыли $f_{\max} =$ $= 146\ 133{,}3$ руб.

Сравним значения запасов и расхода сырья для оптимального плана производства в примере 2.1 (столбцы «запас» и «расход»). Можно увидеть, что сырье второго вида (180 и 138) и пятого вида (180 и 165,3) израсходовано неполностью. Базисные переменные, соответствующие этим ограничениям (x_6 и x_9), для оптимального решения были бы отличными от нуля. Таким образом, базисные переменные можно интерпретировать как показатель ограниченности ресурсов. Если значение базисной переменной равно нулю, то запасы ресурса, соответствующего данному ограничению, недостаточны. Их увеличение может привести к росту значения целевой функции. Для ограничений, базисные переменные которых отличны от нуля, запасы избыточны, что может привести к дополнительным экономическим потерям (затраты на хранение, утилизацию и т.д.).

2.2.2. Графическое решение задачи линейного программирования

Как уже отмечалось выше, если в стандартной форме имеем две переменные, то для такой задачи можно построить область допустимых решений на плоскости и определить решение *графически* по направлению градиента. Область допустимых значений на плоскости имеет вид выпуклого многоугольника. Для каждой точки плоскости линейная функция $f(x) = C^T X$ принимает фиксированное значение $f(x) = L_1$. Множество всех таких точек есть прямая L,